



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.

Math 1608.99.3



SCIENCE CENTER LIBRARY

BOUGHT WITH THE INCOME

FROM THE BEQUEST OF

PROF. JOHN FARRAR, LL.D.,

AND HIS WIDOW,

ELIZA FARRAR,

FOR

"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
ASTRONOMY, AND NATURAL PHILOSOPHY."

Neuer Beweis der Gleichung

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} = 0.$$

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde von der philosophischen Facultät

der

Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin

genehmigt und nebst den beigegeführten Thesen öffentlich zu verteidigen

am 15. Juli 1899

von

Edmund Landau

aus Berlin.

Opponenten:

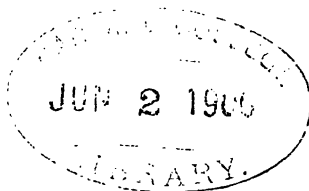
Herr stud. math. Rudolf Ziegler.

Herr stud. math. Fritz Hartogs.

Herr Dr. phil. Ernst Steinitz, Privatdocent an der Kgl. technischen Hochschule zu Charlottenburg.

Berlin 1899.

math 1608.99.3



Farrar fund

Meinen lieben Eltern.

Es bezeichne im Folgenden $\mu(k)$ wie gewöhnlich diejenige zahlentheoretische Function, welche

- 1) für $k = 1$ gleich 1 ist,
 - 2) wenn k durch eine von 1 verschiedene Quadratzahl teilbar ist, gleich 0 ist,
 - 3) wenn jeder Primfactor von k nur einmal in dieser Zahl aufgeht und ρ die Anzahl der Primfactoren von k ist, gleich $(-1)^\rho$ ist.
- Der schon von Euler ausgesprochene Satz, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} = 0$$

ist, d. h. dass $\lim_{x=\infty} \sum_{k=1}^x \frac{\mu(k)}{k}$ existiert und 0 ist, ist erst in allerneuester Zeit bewiesen worden, und zwar gebührt dies Verdienst Herrn von Mangoldt¹⁾. Derselbe geht von den Untersuchungen der Herren Hadamard und de la Vallée-Poussin über die Riemannsche ξ -Function aus, und es scheint auch, dass ohne die Benutzung dieser Arbeiten mit den gegenwärtigen Mitteln der Analysis ein Beweis der Eulerschen Behauptung nicht zu führen ist. Setzt man aber in Übereinstimmung mit Herrn von Mangoldt die Ergebnisse jener Untersuchungen als bekannt voraus, so kann man, wie im Folgenden ausgeführt werden wird, auf einem recht kurzen Wege zum Ziele gelangen.

Der Beweis, der den Inhalt dieser Dissertation bildet, benutzt den zuerst von den Herren Hadamard²⁾ und de la Vallée-Poussin³⁾ bewiesenen Satz⁴⁾:

1) „Beweis der Gleichung $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} = 0$ “; Sitzungsberichte der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1897, S. 835—852.

2) Bulletin de la société mathématique de France, tome 24, 1896, p. 217.

3) Annales de la société scientifique de Bruxelles, tome 20, 2^e partie, p. 251.

4) Bei dem v. Mangoldt'schen Beweise wird übrigens von diesem Satze kein Gebrauch gemacht.

„Wenn $\vartheta(x)$ die Summe der natürlichen Logarithmen aller Primzahlen $\leq x$ ist, so existiert $\lim_{x=\infty} \frac{\vartheta(x)}{x}$ und ist gleich 1“, ist aber abgesehen von diesem angewandten Satze so elementar, als es der Nachweis einer transcendenten Behauptung sein kann.

§ 1.

Es möge unter $g(x)$ die Summe $\sum_1^{[x]} \frac{\mu(k)}{k}$ verstanden werden, wo $[x]$ die grösste nicht oberhalb x gelegene ganze Zahl bezeichnet; hierfür kann einfacher

$$(1) \quad g(x) = \sum_1^x \frac{\mu(k)}{k}$$

geschrieben werden; k hat dann alle positiven ganzen Zahlen $\leq x$ zu durchlaufen. Die Summe hat nur für $x \geq 1$ eine Bedeutung; für $x < 1$ sei $g(x) = 0$.

Unter Anwendung dieser Bezeichnungsweise lauten die beiden Hilfssätze, welche Herr von Mangoldt in einfacher Weise am Anfange seiner Arbeit beweist¹⁾ und die im Folgenden auch angewendet werden:

Es ist für alle x

$$(2) \quad |g(x)| \leq 1^2)$$

und für alle $x \geq 1$

$$(3) \quad \left| \log x \cdot g(x) - \sum_1^x \frac{\mu(k) \log k}{k} \right| \leq 3 + C,$$

wo C die Eulersche Constante bezeichnet.

Die Ungleichheitsbedingung (3), welche Herr von Mangoldt nur abgeleitet hat, um sie an einer gewissen Stelle seines Beweises³⁾ anzuwenden, dient im Folgenden als Grundlage der ganzen Untersuchung.

Was die Summe $\sum_1^x \frac{\mu(k) \log k}{k}$ anbetrifft, so glaubte Möbius⁴⁾ bewiesen zu haben, dass sie sich für hinreichend grosse x um

1) l. c., S. 837—839.

2) Dieser Satz ist, wie ebenda angegeben ist, schon von Herrn Gram in der Preisschrift bewiesen worden: Undersøgelser angaaende Maengden af Primalt under en given Graense, K. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter, 6te Raekke, naturvidenskabelig og matematisk Afdeling, II, 1884, S. 197—198.

3) l. c., S. 843.

4) „Über eine besondere Art von Umkehrung der Reihen“, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 9, S. 122.

beliebig wenig von -1 unterscheidet; sein Beweis ist jedoch nicht stichhaltig. Obgleich neuere Schriftsteller den Satz, dass

$$\lim_{x=\infty} \sum_1^x \frac{\mu(k) \log k}{k}$$

existiere und $= -1$ sei, für wahrscheinlich halten¹⁾, ist es noch nicht einmal gelungen, zu beweisen, dass $\sum_1^x \frac{\mu(k) \log k}{k}$ für alle x zwischen zwei endlichen Grenzen enthalten ist. Da sich nun aus (3) ergibt:

$$\left| g(x) - \frac{1}{\log x} \sum_1^x \frac{\mu(k) \log k}{k} \right| \leq \frac{3+C}{\log x},$$

so folgt, wenn man von dem Euler-v. Mangoldtschen Satze

$$\lim_{x=\infty} g(x) = 0$$

Gebrauch macht, dass

$$\frac{1}{\log x} \sum_1^x \frac{\mu(k) \log k}{k}$$

sich für $x = \infty$ der Grenze 0 nähert.

Wenn es umgekehrt gelingt, direkt nachzuweisen, dass

$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{\log x} \sum_1^x \frac{\mu(k) \log k}{k}$$

existiert und 0 ist, so ist hiermit offenbar die Gleichung

$$\sum_1^\infty \frac{\mu(k)}{k} = 0$$

bewiesen; denn da alsdann nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Grösse δ G so bestimmbar ist, dass für alle $x \geq G$

$$\left| \frac{1}{\log x} \sum_1^x \frac{\mu(k) \log k}{k} \right| \leq \frac{\delta}{2}$$

und

$$0 < \frac{3+C}{\log x} \leq \frac{\delta}{2}$$

1) Z. B. beweist Herr Mertens, welcher die allgemeine Gültigkeit der Ungleichheitsbedingung vermutet:

$$\left| \sum_1^x \mu(k) \right| \leq \sqrt{x},$$

dass jener Satz richtig ist, wenn diese Relation allgemein erfüllt ist (Sitzungsberichte der Wiener Akademie, math.-nat. Kl., Bd. 106, Abt. 2^a, S. 774).

ist, so folgt für $x \geq G$:

$$\begin{aligned} |g(x)| &= \left| g(x) - \frac{1}{\log x} \sum_1^x \frac{\mu(k) \log k}{k} \right| + \left| \frac{1}{\log x} \sum_1^x \frac{\mu(k) \log k}{k} \right| \\ &\leq \left| g(x) - \frac{1}{\log x} \sum_1^x \frac{\mu(k) \log k}{k} \right| + \left| \frac{1}{\log x} \sum_1^x \frac{\mu(k) \log k}{k} \right| \\ &\leq \frac{3+C}{\log x} + \left| \frac{1}{\log x} \sum_1^x \frac{\mu(k) \log k}{k} \right| \\ &\leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta, \end{aligned}$$

also

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0.$$

Der Nachweis, dass für

$$(4) \quad f(x) = \sum_1^x \frac{\mu(k) \log k}{k}$$

$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\log x} = 0$$

ist, wird nun im Folgenden geliefert werden.

Um den Gang der Untersuchung nicht unterbrechen zu müssen, werde folgender einfache Hilfssatz vorangeschickt, der sich übrigens schon bei Gram¹⁾ findet: es ist

$$(6) \quad \sum_{\nu=1}^x \frac{1}{\nu} g\left(\frac{x}{\nu}\right) = g(x) + \frac{1}{2} g\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{3} g\left(\frac{x}{3}\right) + \cdots + \frac{1}{[x]} g\left(\frac{x}{[x]}\right) = 1.$$

In der That besteht der ν^{te} Summand $\frac{1}{\nu} g\left(\frac{x}{\nu}\right)$ aus den Gliedern

$$\frac{1}{\nu} \frac{\mu(1)}{1} = \frac{\mu(1)}{\nu}, \quad \frac{1}{\nu} \frac{\mu(2)}{2} = \frac{\mu(2)}{2\nu}, \quad \dots, \quad \frac{1}{\nu} \frac{\mu(n)}{n} = \frac{\mu(n)}{n\nu}, \quad \dots,$$

$$\frac{1}{\nu} \frac{\mu\left[\frac{x}{\nu}\right]}{\left[\frac{x}{\nu}\right]} = \frac{\mu\left[\frac{x}{\nu}\right]}{\left[\frac{x}{\nu}\right]\nu};$$

die Summe $\sum_{\nu=1}^x \frac{1}{\nu} g\left(\frac{x}{\nu}\right)$ besteht also aus Gliedern von der Form $\frac{\mu(n)}{t}$, wo n ein Teiler von t ist, und zwar durchläuft bei festgehaltenem t n alle Teiler von t , und t selbst kann allen ganzen Zahlen von

1) l. c., S. 197, woselbst in der für jedes r giltigen Gleichung (43) $r = 1$ zu setzen ist.

1 bis $[x]$ gleich sein, also ist

$$\sum_{v=1}^x \frac{1}{v} g\left(\frac{x}{v}\right) = \sum_{t=1}^x \frac{1}{t} \sum_n \mu(n),$$

wo n alle Teiler von t durchläuft; da nun $\sum \mu(n)$ für $t = 1$ gleich 1, sonst gleich 0 ist, so ergibt sich, wie behauptet,

$$\sum_{v=1}^x \frac{1}{v} g\left(\frac{x}{v}\right) = 1.$$

§ 2.

Wenn man nun in der Definitionsgleichung (4) von $f(x)$ für

$$k = p_1 p_2 \dots p_q$$

$\log k$ durch $\log p_1 + \dots + \log p_q$ ersetzt ¹⁾ und alle Glieder zusammenfasst, in denen der Logarithmus derselben Primzahl vorkommt, so ergibt sich eine Gleichung von der Form

$$f(x) = \sum F(p, x) \log p$$

wo die Summe sich über alle Primzahlen $p \leq x$ zu erstrecken hat, und zwar ist, wie sich leicht ergibt und von Herrn von Mangoldt ²⁾ zu einem anderen Zwecke gezeigt worden ist,

$$F(p, x) = -\left(\frac{1}{p} \sum_1^x \frac{\mu(k)}{k} + \frac{1}{p^2} \sum_1^x \frac{\mu(k)}{k} + \frac{1}{p^3} \sum_1^x \frac{\mu(k)}{k} + \dots\right),$$

eine Reihe, welche nur aus einer endlichen Anzahl von Summanden besteht, da der Summationsbuchstabe der i ten Summe von 1 bis $\left[\frac{x}{p^i}\right]$ läuft, so dass $p^i \leq x$, also $i \leq \frac{\log x}{\log p}$ sein muss. Demnach ist

$$f(x) = - \sum_{p \leq x} \log p \left(\frac{1}{p} g\left(\frac{x}{p}\right) + \frac{1}{p^2} g\left(\frac{x}{p^2}\right) + \frac{1}{p^3} g\left(\frac{x}{p^3}\right) + \dots \right),$$

$$(7) f(x) = - \sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} g\left(\frac{x}{p}\right) - \sum_{p \leq x} \log p \left(\frac{1}{p^2} g\left(\frac{x}{p^2}\right) + \frac{1}{p^3} g\left(\frac{x}{p^3}\right) + \dots \right).$$

Da nun nach (2) für alle y

$$|g(y)| \leq 1$$

1) Da $\log k$ mit dem Factor $\frac{\mu(k)}{k}$ multipliziert ist, kommen nur solche k vor, welche aus verschiedenen Primfactoren zusammengesetzt sind.

2) l. c., S. 840.

ist, so ergibt sich für den absoluten Betrag der zweiten Summe

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{p \leq x} \log p \left(\frac{1}{p^2} g\left(\frac{x}{p^2}\right) + \frac{1}{p^3} g\left(\frac{x}{p^3}\right) + \dots \right) \right| \\
 & \leq \sum_{p \leq x} \log p \left(\frac{1}{p^2} \left| g\left(\frac{x}{p^2}\right) \right| + \frac{1}{p^3} \left| g\left(\frac{x}{p^3}\right) \right| + \dots \right) \\
 & \leq \sum_{p \leq x} \log p \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^4} + \dots + \frac{1}{p^n} + \dots \right) \\
 & \leq \sum_{p \leq x} \log p \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{2p^2} + \frac{1}{2^2 p^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1} p^2} + \dots \right) \\
 & \leq \sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p^2} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots) \\
 & \leq 2 \sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p^2} \\
 & < 2 \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\log v}{v^2}.
 \end{aligned}$$

Bekanntlich convergiert $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{\log v}{v^2}$; somit nähert sich entweder die zweite Summe auf der rechten Seite von (7) für $x = \infty$ einer bestimmten Grenze, oder ihr Wert oscilliert zwischen zwei endlichen Unbestimmtheitsgrenzen. Jedenfalls nähert sich also ihr Quotient durch $\log x$ für $x = \infty$ der Grenze 0.

Es werde eine Function $h(x)$ durch die Gleichung

$$(8) \quad h(x) = \sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} g\left(\frac{x}{p}\right)$$

definiert. Wenn es gelingt, zu zeigen, dass $\lim_{x=\infty} \frac{h(x)}{\log x}$ existiert und 0 ist, so ist, da nach (7)

$$\frac{f(x) + h(x)}{\log x} = - \frac{\sum_{p \leq x} \log p \left(\frac{1}{p^2} g\left(\frac{x}{p^2}\right) + \frac{1}{p^3} g\left(\frac{x}{p^3}\right) + \dots \right)}{\log x}$$

ist, und, wie wir soeben sahen, die rechte Seite sich für grosse x der Grenze 0 nähert, die Richtigkeit der Behauptung (5) dargethan.

Der Beweis der Eulerschen Behauptung

$$\sum_1^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} = 0$$

ist also auf den Nachweis der Gleichung

$$\lim_{x=\infty} \frac{h(x)}{\log x} = 0$$

zurückgeführt, welcher im folgenden Paragraphen erbracht werden wird.

§ 3.

Nach der Definition der Function $\vartheta(x)$ ¹⁾ ist für ganze positive ν

$$\begin{aligned}\vartheta(\nu) - \vartheta(\nu - 1) &= \log \nu, \text{ wenn } \nu \text{ eine Primzahl ist,} \\ &= 0, \quad \text{wenn } \nu \text{ eine zusammengesetzte Zahl ist,} \\ &= \log \nu = 0, \text{ wenn } \nu = 1 \text{ ist.}\end{aligned}$$

Also ist

$$h(x) = \sum_{\nu=1}^x \frac{\vartheta(\nu) - \vartheta(\nu - 1)}{\nu} g\left(\frac{x}{\nu}\right),$$

wo ν alle ganzen Zahlen zwischen 1 und x zu durchlaufen hat.

An der Stelle der Function $\vartheta(x)$ werde nunmehr durch die Gleichung

$$(9) \quad \vartheta(x) = x\{1 + \varepsilon(x)\}$$

eine neue Function $\varepsilon(x)$ eingeführt; unter $\varepsilon(0)$ möge 0 verstanden werden. Es handelt sich nur um Werte von x , die ≥ 0 sind. Über die Function $\varepsilon(x)$ ist Folgendes zu bemerken:

1) Da $\vartheta(x)$ seiner Bedeutung gemäss für kein x negativ ist, so ist stets

$$\varepsilon(x) \geq -1.$$

2) Da nach Herrn Mertens²⁾ für alle x

$$\vartheta(x) < 2x$$

ist, so ist stets

$$\varepsilon(x) < 1;$$

also genügt $\varepsilon(x)$ für alle x der Ungleichheitsbedingung

$$(10) \quad |\varepsilon(x)| \leq 1.$$

3) Da nach dem in der Einleitung³⁾ citierten Satz

$$\lim_{x=\infty} \frac{\vartheta(x)}{x} = 1$$

ist, so ist

$$(11) \quad \lim_{x=\infty} \varepsilon(x) = 0.$$

1) s. S. 6, Z. 1–2 v. o.

2) „Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie“, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 78, S. 48.

3) s. S. 6, Z. 1–2 v. o.

Die Einführung der Function $\varepsilon(x)$ ergibt für $h(x)$ den Ausdruck

$$\begin{aligned} h(x) &= \sum_{\nu=1}^x \frac{\nu + \nu \varepsilon(\nu) - (\nu-1) - (\nu-1) \varepsilon(\nu-1)}{\nu} g\left(\frac{x}{\nu}\right) \\ &= \sum_{\nu=1}^x \left\{ \frac{1}{\nu} g\left(\frac{x}{\nu}\right) + \left(\varepsilon(\nu) - \frac{\nu-1}{\nu} \varepsilon(\nu-1) \right) g\left(\frac{x}{\nu}\right) \right\} \\ &= \sum_{\nu=1}^x \frac{1}{\nu} g\left(\frac{x}{\nu}\right) + \sum_{\nu=1}^x \left(\varepsilon(\nu) - \varepsilon(\nu-1) + \frac{1}{\nu} \varepsilon(\nu-1) \right) g\left(\frac{x}{\nu}\right). \end{aligned}$$

Nun ist nach dem Hilfssatze auf S. 8—9

$$\sum_{\nu=1}^x \frac{1}{\nu} g\left(\frac{x}{\nu}\right) = 1;$$

also ergibt sich

$$(12) \quad h(x) - 1 = \sum_{\nu=1}^x \left(\varepsilon(\nu) - \varepsilon(\nu-1) \right) g\left(\frac{x}{\nu}\right) + \sum_{\nu=1}^x \frac{1}{\nu} \varepsilon(\nu-1) g\left(\frac{x}{\nu}\right).$$

Für die erste der beiden Summen in (12) erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^x \left(\varepsilon(\nu) - \varepsilon(\nu-1) \right) g\left(\frac{x}{\nu}\right) &= \sum_{\nu=1}^x \varepsilon(\nu) \left(g\left(\frac{x}{\nu}\right) - g\left(\frac{x}{\nu+1}\right) \right) + \varepsilon([x]) g\left(\frac{x}{[x]+1}\right) \\ &= \sum_{\nu=1}^x \varepsilon(\nu) \left(g\left(\frac{x}{\nu}\right) - g\left(\frac{x}{\nu+1}\right) \right), \end{aligned}$$

da $x < [x] + 1$, also $g\left(\frac{x}{[x]+1}\right) = 0$ ist.

Wenn bei der zweiten Summe in (12) $\nu+1$ statt ν geschrieben wird, so geht sie in

$$\sum_{\nu=0}^{x-1} \frac{1}{\nu+1} \varepsilon(\nu) g\left(\frac{x}{\nu+1}\right) = \sum_{\nu=1}^{x-1} \frac{1}{\nu+1} \varepsilon(\nu) g\left(\frac{x}{\nu+1}\right)$$

über. Also ist

$$(13) \quad h(x) - 1 = \sum_{\nu=1}^x \varepsilon(\nu) \left(g\left(\frac{x}{\nu}\right) - g\left(\frac{x}{\nu+1}\right) \right) + \sum_{\nu=1}^{x-1} \frac{1}{\nu+1} \varepsilon(\nu) g\left(\frac{x}{\nu+1}\right).$$

δ sei eine beliebig kleine positive Grösse. Dann ist nach (11) G so bestimmbar, dass für alle $\nu \geq G$

$$(14) \quad |\varepsilon(\nu)| \leq \frac{\delta}{3}$$

ist. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{\nu=1}^x \varepsilon(\nu) \left(g\left(\frac{x}{\nu}\right) - g\left(\frac{x}{\nu+1}\right) \right) \right| \leq \left| \sum_{\nu=1}^{G-1} \varepsilon(\nu) \left(g\left(\frac{x}{\nu}\right) - g\left(\frac{x}{\nu+1}\right) \right) \right| \\ & \quad + \left| \sum_{\nu=G}^x \varepsilon(\nu) \left(g\left(\frac{x}{\nu}\right) - g\left(\frac{x}{\nu+1}\right) \right) \right| \\ & \leq \sum_{\nu=1}^{G-1} |\varepsilon(\nu)| \left| g\left(\frac{x}{\nu}\right) - g\left(\frac{x}{\nu+1}\right) \right| + \sum_{\nu=G}^x |\varepsilon(\nu)| \left| g\left(\frac{x}{\nu}\right) - g\left(\frac{x}{\nu+1}\right) \right|. \end{aligned}$$

Die rechte Seite wird vergrößert, indem man $|\varepsilon(\nu)|$ in der ersten Summe durch 1 ersetzt (nach (10)), in der zweiten Summe durch $\frac{\delta}{3}$ (nach (14)). Es ergibt sich

$$(15) \quad \left| \sum_{\nu=1}^x \varepsilon(\nu) \left(g\left(\frac{x}{\nu}\right) - g\left(\frac{x}{\nu+1}\right) \right) \right| \leq \sum_{\nu=1}^{G-1} \left| g\left(\frac{x}{\nu}\right) - g\left(\frac{x}{\nu+1}\right) \right| + \frac{\delta}{3} \sum_{\nu=G}^x \left| g\left(\frac{x}{\nu}\right) - g\left(\frac{x}{\nu+1}\right) \right|.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{G-1} \left| g\left(\frac{x}{\nu}\right) - g\left(\frac{x}{\nu+1}\right) \right| & \leq \sum_{\nu=1}^{G-1} \left\{ \left| g\left(\frac{x}{\nu}\right) \right| + \left| g\left(\frac{x}{\nu+1}\right) \right| \right\} \\ & \leq \sum_{\nu=1}^{G-1} (1+1) \quad (\text{wegen (2)}), \end{aligned}$$

also

$$(16) \quad \sum_{\nu=1}^{G-1} \left| g\left(\frac{x}{\nu}\right) - g\left(\frac{x}{\nu+1}\right) \right| \leq 2(G-1)$$

und

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=G}^x \left| g\left(\frac{x}{\nu}\right) - g\left(\frac{x}{\nu+1}\right) \right| & \leq \sum_{\nu=1}^x \left| g\left(\frac{x}{\nu}\right) - g\left(\frac{x}{\nu+1}\right) \right| \\ & = \sum_{\nu=1}^x \left| \sum_1^{\frac{x}{\nu}} \frac{\mu(k)}{k} - \sum_1^{\frac{x}{\nu+1}} \frac{\mu(k)}{k} \right| \\ & = \sum_{\nu=1}^x \left| \sum \frac{\mu(k)}{k} \right|, \end{aligned}$$

wo k alle ganzen Zahlen des Intervalles $\frac{x}{\nu+1}$ (excl.) bis $\frac{x}{\nu}$ (incl.) durchläuft. Folglich ist

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=G}^x \left| g\left(\frac{x}{\nu}\right) - g\left(\frac{x}{\nu+1}\right) \right| & \leq \sum_{\nu=1}^x \sum_{\frac{x}{\nu} \geq k > \frac{x}{\nu+1}} \frac{|\mu(k)|}{k} \leq \sum_{\nu=1}^x \sum_{\frac{x}{\nu} \geq k > \frac{x}{\nu+1}} \frac{1}{k} \\ & = \sum_{x \geq k > \frac{x}{2}} \frac{1}{k} + \sum_{\frac{x}{2} \geq k > \frac{x}{3}} \frac{1}{k} + \sum_{\frac{x}{3} \geq k > \frac{x}{4}} \frac{1}{k} + \cdots + \sum_{\frac{x}{[x]-1} \geq k > \frac{x}{[x]}} \frac{1}{k} \\ & \quad + \sum_{\frac{x}{[x]} \geq k \geq 1} \frac{1}{k} = \sum_1^x \frac{1}{k}, \end{aligned}$$

also, da stets

$$\sum_1^x \frac{1}{k} \leq \log x + 1$$

ist,

$$(17) \quad \sum_{v=g}^x \left| g\left(\frac{x}{v}\right) - g\left(\frac{x}{v+1}\right) \right| \leq \log x + 1.$$

Ersetzt man auf der rechten Seite der Ungleichheitsbedingung (15) die beiden Summen beziehlich durch die aus (16) und (17) sich ergebenden grösseren Werte, so ergibt sich

$$(18) \quad \left| \sum_{v=1}^x \varepsilon(v) \left(g\left(\frac{x}{v}\right) - g\left(\frac{x}{v+1}\right) \right) \right| \leq 2(G-1) + \frac{\delta}{3} (\log x + 1).$$

Die Behandlung der zweiten Summe in (13) ist etwas einfacher. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \left| \sum_{v=1}^{x-1} \frac{1}{v+1} \varepsilon(v) g\left(\frac{x}{v+1}\right) \right| &\leq \sum_{v=1}^{x-1} \frac{1}{v+1} |\varepsilon(v)| \left| g\left(\frac{x}{v+1}\right) \right| \\ &\leq \sum_1^{x-1} \frac{|\varepsilon(v)|}{v+1} \\ &= \sum_1^{G-1} \frac{|\varepsilon(v)|}{v+1} + \sum_G^{x-1} \frac{|\varepsilon(v)|}{v+1} \\ &\leq \sum_1^{G-1} \frac{1}{v+1} + \sum_G^{x-1} \frac{1}{v+1} \frac{\delta}{3} \\ &\leq \sum_1^{G-1} 1 + \frac{\delta}{3} \sum_1^x \frac{1}{v}, \end{aligned}$$

also

$$(19) \quad \left| \sum_{v=1}^{x-1} \frac{1}{v+1} \varepsilon(v) g\left(\frac{x}{v+1}\right) \right| \leq G-1 + \frac{\delta}{3} (\log x + 1)$$

Mit Hilfe von (18) und (19) ergibt sich also aus (13)

$$\begin{aligned} |h(x)| &\leq 1 + 2G - 2 + \frac{\delta}{3} \log x + \frac{\delta}{3} + G - 1 + \frac{\delta}{3} \log x + \frac{\delta}{3} \\ &= 3G - 2 + \frac{2}{3}\delta + \frac{2}{3}\delta \log x, \end{aligned}$$

also für alle

$$x \geq e^{\frac{3G-2+\frac{2}{3}\delta}{\frac{2}{3}\delta}},$$

da alsdann

$$3G - 2 + \frac{1}{3}\delta \leq \frac{1}{3}\delta \log x$$

ist,

$$|h(x)| \leq \frac{1}{3}\delta \log x + \frac{1}{3}\delta \log x \\ = \delta \log x,$$

$$(20) \quad \left| \frac{h(x)}{\log x} \right| \leq \delta.$$

Nach Annahme von δ ist also ξ so bestimmbar, dass für alle $x \geq \xi$ (20) erfüllt ist; folglich existiert $\lim_{x=\infty} \frac{h(x)}{\log x}$ und ist $= 0$. Daraus folgt aber, wie in den beiden ersten Paragraphen dieser Arbeit gezeigt worden ist, dass $\lim_{x=\infty} \sum_1^x \frac{\mu(k)}{k}$ existiert und 0 ist, also die Richtigkeit der in der Überschrift kurz mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} = 0$$

bezeichneten Gleichung.

§ 4.

Wenn

$$M(x) = \sum_1^x \mu(k)$$

definiert wird ¹⁾, so lässt sich mit Hilfe des Satzes

$$\lim_{x=\infty} g(x) = 0$$

nachweisen, dass

$$\lim_{x=\infty} \frac{M(x)}{x} = 0$$

ist. Herr von Mangoldt ²⁾ führt diesen Nachweis indirekt unter Benutzung der Identität

$$g(x) = \sum_1^x \frac{\mu(k)}{k} = \sum_1^x (M(k) - M(k-1)) \frac{1}{k}.$$

Er lässt sich folgendermassen direkt erbringen. Aus der Gleichung

$$M(x) = \sum_1^x \mu(k) = \sum_1^x \frac{\mu(k)}{k} \cdot k = \sum_1^x (g(k) - g(k-1)) \cdot k$$

1) v. Mangoldt, l. c., p. 850.

2) l. c., p. 849—851.

folgt

$$\begin{aligned} M(x) &= \sum_1^{x-1} g(k)(k - (k+1)) + g(x)[x] \\ &= - \sum_1^{x-1} g(k) + g(x)[x], \end{aligned}$$

also, da nach Annahme von δ G so bestimmbar ist, dass

$$\text{für alle } k \geq G \quad |g(k)| \leq \frac{\delta}{3}$$

ist,

$$\begin{aligned} \text{für } x \geq G \quad |M(x)| &\leq \sum_1^{G-1} |g(k)| + \sum_G^{x-1} |g(k)| + |g(x)| \cdot x \\ &\leq G-1 + \frac{\delta}{3}([x] - G) + \frac{\delta}{3}x, \end{aligned}$$

$$\left| \frac{M(x)}{x} \right| \leq \frac{G-1 - \frac{\delta}{3}G}{x} + \frac{1}{3}\delta,$$

also für

$$x \geq \frac{G-1 - \frac{\delta}{3}G}{\frac{\delta}{3}} \quad \text{und zugleich } \geq G$$

$$\left| \frac{M(x)}{x} \right| \leq \frac{1}{3}\delta + \frac{1}{3}\delta = \delta,$$

womit die Behauptung

$$\lim_{x=\infty} \frac{M(x)}{x} = 0$$

bewiesen ist.

Thesen.

1.

Es ist wünschenswert, jeden Existenzbeweis für eine mathematische Grösse so zu führen, dass sich zugleich ein Weg ergibt, auf welchem man zu der als existierend zu erweisenden Grösse gelangen kann.

2.

Eine Grenze zwischen den arithmetischen und den analytischen Gebieten der Mathematik kann nicht gezogen werden.

3.

Der Begriff der semiconvergenten Reihe ist ein relativer Begriff.

4.

Aus der Unmöglichkeit eines perpetuum mobile zweiter Art lässt sich der zweite Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie streng beweisen.

5.

Es ist nicht gelungen, die Psychologie auf exacter mathematischer Grundlage zu begründen.

V i t a.

Natus sum Edmundus Georgius Hermannus Landau Berolini a. h. s. LXXVII patre Leopoldo, doctore medicinae et chirurgiae atque in universitate Friderica Guilelma Berolinensi nunc professore, matre Johanna e gente Jacoby, quos parentes adhuc vivos veneror. Fidei addictus sum iudaicae. Gymnasium frequentavi Berolinense, cui nomen est „collège royal français“. Ubi maturitatis testimonium a. h. s. LXXXVIII assecutus a Rectore Magnifico Virchow inter cives academicos receptus primum per duo semestria Berolini, tum per duo semestria Monachii, deinde per septem semestria rursus Berolini studiis praecipue mathematicis operam navavi.

Docuerunt me viri clarissimi:

Berolini: Arons, de Bezold, Blasius, Du Bois-Reymond (†), Fischer, Frobenius, Fuchs, Glan (†), Harsley, Hensel, Hettner, Knoblauch, Kundt (†), Paulsen, Planck, Schmekel, Schwarz, Strack, Stumpf.

Charlottenburgi: Steinitz.

Monachii: Bauer, Bauschinger, Carriere (†), Graetz, Lindemann, Pringsheim, Thiele.

Seminarii mathematici Monacensis per duo semestria, Berolinensis per septem semestria sodalis fui, colloquiis viri illustrissimi H. A. Schwarz per quinque semestria, exercitationibus, quas vir clarissimus Planck de rebus mathematico-physicis instituere solet, per tria semestria interfui; denique in laboratorio, quod nunc est sub auspiciis viri doctissimi Rosenheim, autumno a. h. s. LXXXIV experimentis chemicis operam dedi.

Quibus omnibus viris gratias ago quam maximas, imprimis professoribus illustrissimis Georgio Frobenius, Lazaro Fuchs, Conrado Hensel, Hermannо Amando Schwarz.

2000